高・数学１　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　※ 印のところは記入しない

受検番号		氏名		※	

切り取らないこと

令和４年度採用　山梨県公立学校教員選考検査

※

高等学校　数学　解答例

1 (26点)	（１）	①	数学的活動	②	相関係数	③	コンピュータ	④	仮説検定
		⑤	傾向	⑥	特徴	⑦	不確実	⑧	実験
	（２）	指導例 ○教師は平均が同じである，偏差が大きいデータと偏差が小さいデータを用意する。 ・2つのデータのセットの散らばり具合いの違いは生徒にヒストグラムや箱ひげ図などを書かせ実感させておく。 ○ V_1 ， V_2 の値を生徒に計算させる。 ・データ数も考慮し，計算のしやすさにも配慮する。ICT も活用する。 ○ V_1 ， V_2 の値を観察させる。V_2 を用いる妥当性を理解させる。 ・V_1 の値は与えられたデータの偏差の大小にかかわらず常に 0 である。 それに対し V_2 の値は偏差が大きいデータの場合は大きく，偏差が小さいデータの場合は小さくなり，データの散らばりの度合いを数値化するには適しているのではないかという結論に導いていく。その後， V_2 を分散として定義する。							

2 (32点)	（１）	$a=2$	$b=3$
	（２）	992	
	（３）	280	
	（４）	0	
	（５）	$a=7$	極限値 $\dfrac{7}{10}$
	（６）	$n(n-1)$	
	（７）	$\dfrac{1}{4}$	
	（８）	1	

（裏面に続く）

3

22 点

関数 $f(x)$ において生徒は x の区間による場合分けや，関数の増減についてある程度理解していると判断できる。

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{e^{x}} & (x \geqq 0) \\ \dfrac{-x}{e^{x}} & (x<0) \end{cases}$$

このことを踏まえ次のように指導を行う。

【必要事項】

生徒の解答から，

- $x=0$ における関数 $f(x)$ の微分係数の存在（グラフのつなぎ目のなめらかさ）をしらべること，
- 関数 $f(x)$ の第2次導関数 $f''(x)$ からグラフの凹凸をしらべること，
- $x \to \pm\infty$ における関数 $f(x)$ の振るまいについて調べること

が必要事項になると考えられる。

【指導内容】

○　$x=0$ における関数 $f(x)$ の微分可能性について指導する。

$x=0$ における微分係数は

（ｉ）$x \geqq 0$ において 右微分係数 $f'_{+}(0)=1$

（ⅱ）$x<0$ において左微分係数 $f'_{-}(0)=-1$

よって原点 $(0,0)$ において微分係数が存在しない。微分不可能である。

○　関数の凹凸について，第２次導関数をもとめ，符号の変化より求める。

$x<0$ では $f''(x)=\dfrac{2-x}{e^{x}}$ ，　$x \geqq 0$ では $f''(x)=\dfrac{x-2}{e^{x}}$ である。

- 区間 $x<0$ では $f''(x)>0$ より，$y=f(x)$ のグラフは下に凸
- 区間 $0 \leqq x<2$ では $f''(x)<0$ より，$y=f(x)$ のグラフは上に凸
- 区間 $x>2$ では $f''(x)>0$ より，$y=f(x)$ のグラフは下に凸となることを理解させる。

※　$f''(2)=0$ である。

○ $x \to \pm\infty$ における $f(x)$ の振るまい，つまり漸近挙動について理解させる。

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

において，特に $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ となることについては，以下のように指導する。

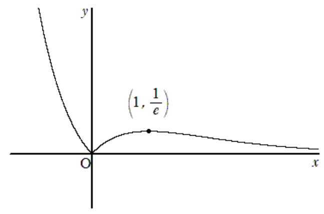
$x>0$ のとき，不等式 $e^{x}>1+x+\frac{1}{2}x^{2}$ を利用し，

$e^{x}>\dfrac{x^{2}}{2}$ から $0<\dfrac{x}{e^{x}}<\dfrac{2}{x}$ とし，はさみうちの原理より $\dfrac{x}{e^{x}} \to 0$ $(x\to\infty)$ となることを指導する。

これらの指導を通じて，$x=0$ での関数 $f(x)$ の微分可能性，グラフの凹凸，$x \to \pm\infty$ におけるグラフの漸近挙動を捉えることができる。
その結果，以下のような増減及び凹凸を調べた表及び正しいグラフがかけることにつながる。

なお，任意の x において関数 $f(x)$ の値は非負であることも，グラフを捉えさせる見方の一つになっていることにも注意させたい。

x		0		1		2	
$f'(x)$	$-$	／	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	／	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{2}{e^{2}}$	↘
		極小値		極大値		変曲点	



4

20 点

（１）

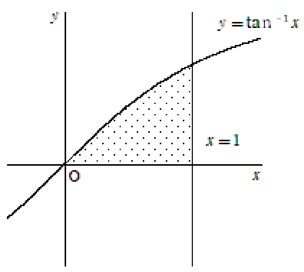
$y=\tan^{-1}x$ より，$x=\tan y$ である。

$x=\tan y$ の両辺を x で微分すると，　$1=\dfrac{d}{dy}\tan y \cdot \dfrac{dy}{dx}$ より $1=\dfrac{1}{\cos^{2} y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\cos^{2} y=\frac{1}{1+\tan^{2} y}=\frac{1}{1+x^{2}}$$

（２）

求める面積は右の図のようになる。
　グラフについては，(1) で求めた導関数の符号が常に正であることや，$y=\tan x$ のグラフと $y=x$ のグラフに関して線対称であることを用いてかく。



求める面積をSとおく。

$$\begin{aligned} S &= \int_{0}^{1} \tan^{-1} x \, dx \\ &= \left[x\tan^{-1}x\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\frac{x}{1+x^{2}}\,dx \\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{(1+x^{2})'}{1+x^{2}}\,dx \\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left[\log(1+x^{2})\right]_{0}^{1} \\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2 \end{aligned}$$